

LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT DUÁLISA, ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLAT

GAZDASÁGMATEMATIKA 2. GYAKORLAT - 11. HÉT

KÉSZÍTETTE: DR. NAGY NOÉMI

A lineáris programozási feladat duálisa a következő táblázat segítségével írható fel:

	MAX	MIN	
változók	≥ 0	$\geq$	feltételek
	előjelkötetlen	$=$	
	≤ 0	$\leq$	
feltételek	$\geq$	≤ 0	változók
	$=$	előjelkötetlen	
	$\leq$	≥ 0	

A táblázat szerint egy lineáris programozási feladat duálisának célfüggvénye ellentétes irányú, azaz ha az úgynevezett primál feladat maximumot keres, annak duálisa minimalizál és fordítva.

Nagyjából ez úgy képzelhető el, mint egy kétszemélyes játékelméleti feladat: A két játékos egymással egy játékot - akár egy kő-papír-olló(-gyík-Spocko)t - játszik. Az egyszerűség kedvéért amennyiben ugyanazt mutatják, egyikük sem nyer, egyébként a nyertes 1000 Ft-ot nyer a másik játékostól. Nyilvánvalóan mindkét játékos célja, hogy minél többet nyerjen el a másiktól, de erre úgy is gondolhatunk, hogy az egyik játékos helyébe képzeljük magunkat és amellett, hogy a saját nyereményünket maximalizáljuk, egyúttal az ellenfél nyereményét minimalizálni akarjuk. A feladatot tovább bonyolíthatja, ha a különböző párok különböző értékűek. Ebben az esetben is az első játékos stratégiájára válaszul a második játékosnak is meg kell határoznia a saját stratégiáját. Ehhez a különböző nyeremények szerinti feltételeket tudnak a játékosok felírni. A végeredmény mindkét játékosnál egy-egy stratégia lesz, azaz megkapják, hogy melyik jelet milyen gyakorisággal érdemes mutatni ahhoz, hogy a nyereményük minél nagyobb, illetve hogy a veszteségük minél kisebb legyen.

Nézzünk most egy konkrét példát:

1. PÉLDA

Írja fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned}
 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 2 \\
 -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -5 \\
 x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq -3 \\
 x_1 \leq 0, \ x_2 \text{ előjelkötetlen}, \ x_3 &\geq 0 \\
 2x_1 - 2x_2 + x_3 &\rightarrow \min
 \end{aligned}$$

Megoldás. A feladat duálisának felírásához minden változóból feltétel lesz és minden feltétel változóvá válik. Ez azt jelenti, hogy

- x_1 együtthatói és a rá vonatkozó előjel szerinti előírás fogják meghatározni az első feltételt, az x_2 együtthatói és előjele mutatja majd a második feltételt, stb.
- Az eredetileg a célfüggvényben szereplő együtthatók a duál feltételek jobb oldalán lévő értékek lesznek.
- A különböző feltételekhez y_i változókat kell bevezetnünk. A feltételekben szereplő megkötések ($\geq$, $=$, $\leq$) határozzák majd meg az adott y_i előjelét.
- Az új célfüggvény együtthatói a primál feladat feltételeinek jobb oldalán szereplő értékekből adódnak.

Tehát a duál feladat:

$$\begin{aligned} 5y_1 - y_2 + y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + 5y_2 - 2y_3 &= -2 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\leq 1 \\ y_1 &\geq 0, y_2 \text{ előjelkötetlen}, y_3 \geq 0 \\ 2y_1 - 5y_2 - 3y_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Miután a duál feladat felírására már ismerjük a módszert, nézzük meg, hogyan történik egy duál feladat megoldásának leolvasása az optimális táblából, valamint végezzünk érzékenységvizsgálatot a kapacitásokra és a célfüggvény-együtthatókra. Továbbá vizsgáljuk meg, hogyan a simplex módszer hogyan reagál arra, ha a kapacitások vagy célfüggvény-együtthatók együttesen változnak.

Ehhez felírjuk a feladat szövegét, a matematikai modellt és az optimális táblát is, hogy a lényegre koncentrálhassunk.

Megjegyezzük továbbá, hogy az optimális táblában szükség van (lehet) a törölt u^* oszlopokra is, ezeket a b oszlop mögé írjuk fel.

2. PÉLDA

A távoli jövőben a vizsgákra különböző ízesítésű tudástabletták bevételével is fel lehet készülni. Egy spenótos tabletta elfogyasztása 10%-kal, egy eperízű tabletta elfogyasztása 7%-kal növeli a hallgató tudását. (Tehát 4 spenótos és 5 eper tabletta esetén a tananyag 75%-ának lennének a birtokában.) Egy spenótos tabletta 2000, egy eperízű tabletta 1500 forintba kerül. A túladagolás elkerülése érdekében a két tablettából összesen legfeljebb 8 darab vehető be, és arra is ügyelnünk kell, hogy legalább annyi eprest vegyünk be, mint spenótost (az utóbbi nem túl kellemes íze miatt). Milyen összetételben vásároljuk a tablettákból, ha a lehető legkevesebbet szeretnénk költeni és 51% a sikeres

vizsga teljesítésének feltétele?

A matematikai modell:

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$10x_1 + 7x_2 \geq 51$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$2000x_1 + 1500x_2 \rightarrow \min$$

Optimális tábla:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	7/17	-1/17	3	1/17
u_2	3/17	2/17	2	-2/17
x_2	-10/17	-1/17	3	1/17
z	-1000/17	-3500/17	10500	3500/17

- Írja fel a feladat duálisát és határozza meg annak megoldását!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot az első kapacitásra (spenótos és epres tabletta számának különbsége)!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot a második kapacitásra (bevehető tabletták darabszáma)!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot a harmadik kapacitásra (sikeres teljesítés százaléka)!
- Mennyivel kellene a sikeres teljesítés százalékat módosítani, hogy az elköltött összeg 17%-kal csökkenjen?
- Mennyire változhatna a sikeres teljesítés százaléka, ha az eredetihez képest 40%-kal többet költ-hetnénk?
- Legfeljebb hány százalékkal növekedhet az elköltött összeg a sikeres teljesítés százaléka-nak meg-változtatásával?
- Végezzen érzékenységvizsgálatot a spenótos tabletta árára!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot az epres tabletta árára!
- Hogyan változik az optimális tábla, ha a kapacitások (0, 8, 51)-ről (1, 10, 61)-re változnak?
- Hogyan változik az optimális tábla, ha a célfüggvény-együtthatók (2000, 1500)-ról (2035, 1535)-ra változnak?

a) megoldása. A feladat duálisa:

$$y_1 + y_2 + 10y_3 \leq 2000$$

$$-y_1 + y_2 + 7y_3 \leq 1500$$

$$y_1, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0$$

$$0y_1 + 8y_2 + 51y_3 \rightarrow \max$$

A duál feladat megoldása is leolvasható az optimális táblából azzal, hogy itt nem a b oszlopból olvas-suk le az x -ek értékeit, hanem z (vagy $-z$) sorából, nagyon ügyelve rá, hogy ott z vagy $-z$ szerepel-e, hiszen ettől függ, az érték (-1) -szeresét kell-e vennünk. ($-z$ esetén vesszük az értékek (-1) -szeresét, z esetén már maga az érték látszik.) Továbbá megjegyezzük, hogy a táblázatban szereplő u -k megfelel-nek a duál feladatban szereplő y -oknak:

$y_1 (= u_1) = -1000/17$, $y_2 (= u_2) = 0$, $y_3 (= u_3^*) = 3500/17$. A célfüggvény optimális értéke: 10500.

y_2 értéke azért 0, mert u_2 az első oszlopban van, mi pedig most z sorából olvastuk le az értékeket.

b) megoldása. Az első kapacitásra vonatkozó érzékenységvizsgálat előzetesen annyit jelent, hogy az első feltételben 0 helyett $0 + \lambda$ szerepel.

Ez az optimális táblában mindössze annyit fog jelenteni, hogy b oszlopának helyére $b + \lambda \cdot u_1$ fog kerülni, azaz:

	u_1	v_1	$b + \lambda \cdot u_1$	u_3^*
x_1	$7/17$	$-1/17$	$3 + \lambda \cdot 7/17$	$1/17$
u_2	$3/17$	$2/17$	$2 + \lambda \cdot 3/17$	$-2/17$
x_2	$-10/17$	$-1/17$	$3 + \lambda \cdot (-10/17)$	$1/17$
z	$-1000/17$	$-3500/17$	$10500 + \lambda \cdot (-1000/17)$	$3500/17$

Azonban ebben a táblában is teljesülnie kell, hogy a b oszlopában negatív érték nem szerepelhet, vagyis:

$$3 + \lambda \cdot 7/17 \geq 0,$$

$$2 + \lambda \cdot 3/17 \geq 0, \text{ és}$$

$$3 + \lambda \cdot (-10/17) \geq 0.$$

Megoldva az egyenlőtlenségeket, a következő feltételeket kapjuk a λ -ra vonatkozóan:

$$\lambda \geq -51/7,$$

$$\lambda \geq -34/3,$$

$$21/10 \geq \lambda.$$

Ezek együttesen a $\lambda \in [-51/7, 21/7]$ intervallumon teljesülnek.

Ekkor $z = 10500 - 1000/17 \cdot \lambda$. (Ez szerepel ugyanis $z - b$ metszetében.)

c) megoldása. Amennyiben a második kapacitásra (8 értékére) szeretnénk érzékenységvizsgálatot végezni, a $b + \lambda \cdot u_2$ oszlopot kellene elkészítenünk, de amint látható u_2 oszlopunk nincsen, hiszen u_2 a bázisban szerepel. Viszont el tudjuk készíteni az u_2 oszlopát, még hozzá úgy, hogy az u_2 értéke mindenütt 0 lesz, kivéve ott, ahol u_2 sorát nézzük. Azon a helyen az érték 1:

	u_1	v_1	b	u_3^*	u_2
x_1	$7/17$	$-1/17$	3	$1/17$	0
u_2	$3/17$	$2/17$	2	$-2/17$	1
x_2	$-10/17$	$-1/17$	3	$1/17$	0
z	$-1000/17$	$-3500/17$	10500	$3500/17$	0

Így már el tudjuk készíteni a $b + \lambda \cdot u_2$ oszlopot:

	u_1	v_1	$b + \lambda \cdot u_2$	u_3^*	u_2
x_1	$7/17$	$-1/17$	$3 + \lambda \cdot 0$	$1/17$	0
u_2	$3/17$	$2/17$	$2 + \lambda \cdot 1$	$-2/17$	1
x_2	$-10/17$	$-1/17$	$3 + \lambda \cdot 0$	$1/17$	0
z	$-1000/17$	$-3500/17$	$10500 + \lambda \cdot 0$	$3500/17$	0

A b oszlopban továbbra sem szerepelhetnek negatív értékek (z sorát kivéve), így továbbra is fennállnak a feltételek, melyek megoldásai:

$$3 + \lambda \cdot 0 \geq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2 + \lambda \cdot 1 \geq 0 \implies \lambda \geq -2$$

$$3 + \lambda \cdot 0 \geq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

A három feltétel közös része: $\lambda \geq -2$, ahol $z = 10500 + \lambda \cdot 0 = 10500$.

Ez azt jelenti, hogy ha legfeljebb 2-vel csökkentjük a 8 értékét (vagy tovább növeljük azt) a második feltételben, akkor az optimális érték 10500 marad.

d) megoldása. A harmadik kapacitás megváltoztatása azt jelenti, hogy 51 helyett $51 + \lambda$ lesz, azaz az optimális táblában b helyén $b + \lambda \cdot u_3^*$ lesz:

	u_1	v_1	$b + \lambda \cdot u_3^*$	u_3^*
x_1	$7/17$	$-1/17$	$3 + \lambda \cdot 1/17$	$1/17$
u_2	$3/17$	$2/17$	$2 + \lambda \cdot (-2/17)$	$-2/17$
x_2	$-10/17$	$-1/17$	$3 + \lambda \cdot 1/17$	$1/17$
z	$-1000/17$	$-3500/17$	$10500 + \lambda \cdot 3500/17$	$3500/17$

Továbbra is teljesül, hogy a b oszlopában nem szerepelhet negatív érték:

$$3 + \lambda \cdot 1/17 \geq 0 \implies \lambda \geq -51$$

$$2 + \lambda \cdot (-2/17) \geq 0 \implies 17 \geq \lambda$$

$$3 + \lambda \cdot 1/17 \geq 0 \implies \lambda \geq -51$$

A feltételek közös része: $\lambda \in [-51, 17]$, amikor $z = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$.

e) megoldása. Amennyiben a teljesítés százalékát kívánjuk vizsgálni, akkor erre a kapacitásra kell elvégezni az érzékenységvizsgálatot. Amint látjuk, a d) pontban ezt a kérdést már megválaszoltuk: $\lambda \in [-51, 17]$, $z = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$. Az elköltött összeg 17%-kal történő csökkentése azt jelenti, hogy a fenti z értéknek az optimális érték 83%-ával kell megegyeznie:

$$10500 \cdot 0.83 = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$$

$$8715 = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$$

$$-1785 = \lambda \cdot 3500/17$$

$$-8.67 = \lambda$$

Azt kaptuk eredményül, hogy ha 17%-kal csökkentjük az optimális értéket, azaz a tablettákra szánt összeget, akkor az 51%-os követelményt 8.67%-kal kellene csökkenteni.

Mivel a kapott érték benne van a $[-51, 17]$ intervallumban, ezért ez a lehetőség kivitelezhető.

f) megoldása. Ebben az esetben is a sikeres teljesítés és az optimális érték kapcsolatát vizsgáljuk, ezért szükség van az érzékenységvizsgálat során kapott eredményre: $\lambda \in [-51, 17]$, $z = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$ és az optimális értékre: 10500.

Ha a keretünk 40%-kal nagyobb, az azt jelenti, hogy

$$10500 \cdot 1.4 = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$$

$$14700 = 10500 + \lambda \cdot 3500/17$$

$$4200 = \lambda \cdot 3500/17$$

$$20.4 = \lambda$$

Sajnos a kapott érték nem esik bele a $[-51, 17]$ intervallumba, ezért az optimális érték ilyen mértékű megváltoztatása kizárólag a harmadik kapacitás megváltoztatásával nem kivitelezhető.

g) megoldása. A kérdést a következőképpen kell értelmeznünk:

$$10500 \cdot (1 + a/100) = 10500 + \lambda \cdot 3500/17 \quad \lambda \in [-51, 17]$$

a baloldal akkor a legnagyobb, ha $\lambda = 17$

$$10500 \cdot (1 + a/100) = 10500 + 17 \cdot 3500/17$$

$$10500 \cdot (1 + a/100) = 14000$$

$$1 + a/100 = 4/3 \quad a = 100/3$$

Az elköltött összeg legfeljebb 33.3333%-kal növekedhet, ha a teljesítési feltételt a lehető legmagasabbra növelik.

h) megoldása. Amennyiben a célfüggvény együtthatóját változtatjuk, az a célfüggvény (z vagy $-z$) sorában fog megjelenni a következőképpen:

Amennyiben valamelyik x_i együtthatóját λ -val változtatjuk, a célfüggvény sora $z + \lambda \cdot x_i$ lesz. Ez azt jelenti, hogy ha z szerepelt a sor elején, akkor $z + \lambda \cdot x_i$ lesz helyette, $-z$ esetén pedig $-(z + \lambda \cdot x_i) = -z - \lambda \cdot x_i$. (Tehát az előjelre nagyon oda kell figyelni.)

A spenótos tabletta árára vonatkozóan tehát az alábbi táblát kapjuk:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	$7/17$	$-1/17$	3	$1/17$
u_2	$3/17$	$2/17$	2	$-2/17$
x_2	$-10/17$	$-1/17$	3	$1/17$
$z + \lambda \cdot x_1$	$-1000/17 + \lambda \cdot 7/17$	$-3500/17 + \lambda \cdot (-1/17)$	$10500 + \lambda \cdot 3$	$3500/17 + \lambda \cdot 1/17$

Az utolsó sorban szereplő értékekre továbbra is fennáll, hogy nem pozitívak, különben tovább kellene számolni a táblázatot:

$$-1000/17 + \lambda \cdot 7/17 \leq 0 \quad \implies \quad \lambda \leq 1000/7$$

$$-3500/17 + \lambda \cdot (-1/17) \leq 0 \quad \implies \quad -3500 \leq \lambda$$

Így $\lambda \in [-3500, 1000/7]$ esetén a $10500 + \lambda \cdot 3$ lesz az optimális érték.

i) megoldása. Itt a $z + \lambda \cdot x_2$ sor kerül a z helyére:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	$7/17$	$-1/17$	3	$1/17$
u_2	$3/17$	$2/17$	2	$-2/17$
x_2	$-10/17$	$-1/17$	3	$1/17$
$z + \lambda \cdot x_2$	$-1000/17 + \lambda \cdot (-10/17)$	$-3500/17 + \lambda \cdot (-1/17)$	$10500 + \lambda \cdot 3$	$3500/17 + \lambda \cdot 1/17$

A feltételek tehát:

$$-1000/17 + \lambda \cdot (-10/17) \leq 0 \quad \implies \quad -100 \leq \lambda$$

$$-3500/17 + \lambda \cdot (-1/17) \leq 0 \quad \implies \quad -3500 \leq \lambda$$

A két feltétel által meghatározott közös feltétel $-100 \leq \lambda$, amikor $z = 10500 + \lambda \cdot 3$.

j) megoldása. Amikor a kapacitások együttesen változnak, az is könnyen megvalósítható az optimális tábla ismeretében. A változás itt is csak a b oszlopban fog megjelenni:

Az u sorok és oszlopok elé írjuk le az új értékeket, a többi változó elé 0-kat. b értékei a következőképpen kaphatók meg:

		1	0		61
		u_1	v_1	b	u_3^*
0	x_1	7/17	-1/17	$0 + 7/17 \cdot 1 + (-1/17) \cdot 0 + 1/17 \cdot 61$	1/17
10	u_2	3/17	2/17	$10 + 3/17 \cdot 1 + 2/17 \cdot 0 + (-2/17) \cdot 61$	-2/17
0	x_2	-10/17	-1/17	$0 + (-10/17) \cdot 1 + (-1/17) \cdot 0 + 1/17 \cdot 61$	1/17
	z	-1000/17	-3500/17	$-1000/17 \cdot 1 + (-3500/17) \cdot 0 + 3500/17 \cdot 61$	3500/17

Kiszámítva b értékeit:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	7/17	-1/17	4	1/17
u_2	3/17	2/17	3	-2/17
x_2	-10/17	-1/17	3	1/17
z	-1000/17	-3500/17	12500	3500/17

k) megoldása. A számítás a kapacitásértékek változásához hasonló. A legfőbb különbség, hogy a változások a z (vagy $-z$) sorában jelennek meg. Éppen ezért oda kell figyelni, hogy éppen z vagy $-z$ szerepel az utolsó sorban.

Az új tábla kiszámításánál az x sorai elé beírjuk az új együtthatókat, x oszlopai elé pedig az új együtthatók (-1) -szereseit. Majd a következőképpen határozzuk meg a z új értékeit:

		0	0		0
		u_1	v_1	b	u_3^*
2035	x_1	7/17	-1/17	3	1/17
0	u_2	3/17	2/17	2	-2/17
1535	x_2	-10/17	-1/17	3	1/17
	z	z_1	z_2	z_3	z_4

$$z_1 = 0 + 7/17 \cdot 2035 + 3/17 \cdot 0 + (-10/17) \cdot 1535 = -65$$

$$z_2 = 0 + (-1/17) \cdot 2035 + 2/17 \cdot 0 + (-1/17) \cdot 1535 = -210$$

$$z_3 = 3 \cdot 2035 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1535 = 10710$$

$$z_4 = 0 + 1/17 \cdot 2035 + (-2/17) \cdot 0 + 1/17 \cdot 1535 = 210$$

Tehát az új táblázat:

	u_1	v_1	b	u_3^*
x_1	7/17	-1/17	3	1/17
u_2	3/17	2/17	2	-2/17
x_2	-10/17	-1/17	3	1/17
z	-65	-210	10710	210

Ismételten felhívjuk a figyelmet, hogy az utolsó sorban a z és $-z$ közötti különbség a sor minden értékében megjelenik, hiszen z esetén a fenti számolással megkapjuk a sorbeli értékeket, azonban $-z$ esetén a fenti módon megkapott eredmények (-1) -szeresei kerülnek a $-z$ sorába.

Továbbá megjegyezzük, hogy az utolsó két részfeladat alkalmas arra is, hogy a kapott b oszlopában és/vagy z vagy $-z$ sorában lévő értékeket ellenőrizzük.